

**重點 1：對數(logarithm)的意義**

1.常用對數：底數為 10 的對數

對於任一正數  $r$ ，都可以用  $10^{\log r} = r$  來表示，因此，要求  $\log r$  時，就是要找一個次方  $b$ ，滿足  $10^b = r$ ，則  $b = \log r$

註： $r \leq 0$  時  $\log r$  沒有意義，因為 10 的任意次方的值為正數或 0

2.一般對數：底數為正數  $a > 0$ ，且  $a \neq 1$  的對數

對於任意正數  $r$ ，若實數  $b$  滿足  $a^b = r$ ，則稱  $b$  為以「 $a$  為底數時， $r$  的對數」，記為  $b = \log_a r$

亦即  $a^{\log_a r} = r$ ，或是當  $\log_a r = b$  時，就是  $a^b = r$

**◎底數為 10 的常用對數**

例 1.1：試求下列各值：

(1)  $\log 1$       (2)  $\log 100$       (3)  $\log 100000$       (4)  $\log 0.001$       (5)  $\log \frac{1}{10^8}$       (6)  $\log \sqrt[3]{100}$

**◎底數不為 10 的一般對數**

例 1.2：試求下列各值：(1)  $\log_2 16$       (2)  $\log_{27} 9$

**重點 2：對數的性質**

設  $x, y, b$  都是正數， $a, c$  都是不為 1 的正數， $m, n$  為實數，則：

1.  $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$  (兩加乘)      (註：(1)  $\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$       (2)  $\log_a xy \neq \log_a x \log_a y$ )

2.  $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$  (兩減除)      (註：(1)  $\log_a(x-y) \neq \log_a x - \log_a y$       (2)  $\frac{\log_a x}{\log_a y} \neq \log_a \frac{x}{y}$ )

3.  $\log_a b^n = \frac{n}{m} \log_a b$  (同類型公式：(1)  $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x$       (2)  $\log_a x^n = n \log_a x$ )

4.  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$  (換底公式)

5.  $\log_a b \log_b c = \log_a c$  (連鎖律)

6.  $a^{\log_a b} = b$  (特例： $a^{\log_c b} = b \log_c a$ ， $a, b, c$  為正數， $c \neq 1$ ，兩邊同取  $\log$  證明)

7.  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$  (底數、真數互換為倒數關係)

8. 設  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ，則下列為常見之對數：

(1)  $\log_a 1 = 0$       (2)  $\log_a a = 1$       (3)  $\log_a a^x = x$       (4)  $\log_a \frac{1}{a} = -1$

## ◎底數為10的常用對數

例2.1：試求下列各式的值：(1)  $\log 4 + \log 25$ (2)  $\log(3 \times 10^{23}) - \log 3$ (3)  $\log 30^5 - \log 243$ 

## ◎底數不為10的常用對數

例2.2：試求下列各式的值：(1)  $\log_2 16$ (2)  $\log_{27} 9$ 

## 重點 3：對數值之計算

1. 意義：對數之值可經由運算性質化簡、查表、計算機等求得其數值

2. 常見對數值方法：

(1) 將  $\log 2$ ， $\log 3$ ， $\log 7$  熟記其值

(2) 利用質因數分解方法化簡，求對數值

## ◎常用對數

例 3.1：已知  $\log 2 = a$ ， $\log 3 = b$ ，試以  $a$ ， $b$  完成下表：

|          |          |          |          |          |          |          |           |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| $\log 1$ | $\log 4$ | $\log 5$ | $\log 6$ | $\log 7$ | $\log 8$ | $\log 9$ | $\log 10$ |
|          |          |          |          | $c$      |          |          |           |

## ◎常用對數

例 3.2：試利用換底公式，以  $\log 2$  表示  $\log_2 200$

**重點 4：利用計算機求一般對數值**

1. 使用計算機求可求出常用對數值
2. 一般的計算機不見得有一個方便的按鍵可以直接按出一般對數值。必須利用**換底公式**來計算

例 4.1：利用計算機求  $\log_2 3$  的近似值(計算到小數點後第 5 位)

**重點 5：應用問題**

意義：科學上利用對數來表示其相對之關係式。

如：地震釋放出的能量與芮氏規模間的關係、聲音之大小與其強度的關係、化學酸鹼度的計算等等

例 5.1：根據牛頓冷卻定律，物體的溫度變化，可以以數學公式  $f(t) = E + (f(0) - E) \times 10^{-kt}$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) 描述，其中  $f(t)$  是物體在  $t$  分鐘時的溫度； $f(0)$  則是物體起始( $t=0$ )時的溫度， $E$  是環境溫度(單位： $^{\circ}\text{C}$ )， $k$  是一常數。如果已知實驗室溫度維持  $17^{\circ}\text{C}$ ，且  $k=0.012$ ，則：

- (1) 若沖煮好一杯  $83^{\circ}\text{C}$  的咖啡，放置 10 分鐘後，咖啡下降至多少  $^{\circ}\text{C}$ ？(四捨五入至整數位)
- (2) 若沖煮好一杯  $83^{\circ}\text{C}$  的咖啡，自然靜置幾分鐘後是容易入口的  $45^{\circ}\text{C}$  呢？(四捨五入至整數位)